Теорема 1. *Для любого натурального* $n \geqslant 2$ *в метрическом пространстве* M_n *с топологией равномерной сходимости на полуоси внутренность множества* WE_n *слабо экспоненциально дихотомических систем совпадает с множеством экспоненциально дихотомических систем, т. е.* $\operatorname{int} WE_n = E_n$ *для любого* $n \geqslant 2$.

Следствие. *В метрическом пространстве* M_n, $n \geqslant 2$, *с топологией равномерной сходимости на полуоси множество* WE_n *не является ни открытым, ни замкнутым, все его точки предельные, а его край* $\operatorname{ed} WE_n$ *(т. е. множество* $\operatorname{ed} WE_n \stackrel{\text{def}}{=} \stackrel{\text{def}}{=} WE_n \setminus \operatorname{int} WE_n$ *составляют в точности слабо экспоненциально дихотомические системы, не являющиеся экспоненциально дихотомическими.*

Теорема 1 и ее следствие допускают усиление.

Приведем необходимое определение. Если вышеупомянутые положительные постоянные $c_1(x)$ и $c_2(x)$ можно выбрать одними и теми же для всех решений из L_- и L_+, но не при всех $t \geqslant 0$, а при всех $t \geqslant t_x$, где t_x свое, вообще говоря, для каждого решения $x(\cdot)$, то приходим к определению слабо экспоненциально дихотомической системы в узком смысле.

Класс таких систем обозначим SWE_n.

Теорема 2. *Включения* $E_n \subset SWE_n \subset WE_n$ *являются собственными.*

Теорема 1 и ее следствие справедливы и для класса слабо экспоненциально дихотомических систем в узком смысле.

Литература

1. Бекряева Е. Б. *О равномерности оценок норм решений экспоненциально дихотомических систем* // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46, № 5. С. 626–636.

2. Бекряева Е. Б. *Линейные дифференциальные системы, близкие к экспоненциально дихотомическим* // Докл. НАН Беларуси. 2011. Т. 55, № 1. С. 36–40.

3. Барабанов Е. А., Конюх А. В. *Равномерные показатели линейных систем дифференциальных уравнений* // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30, № 10. С. 1665–1676.

4. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. *Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.* М.: Наука, 1970. 536 с.

ОСОБЫЕ РЕШЕНИЯ СУЩЕСТВЕННО НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

М.А. Белозерова, Т.С. Тютюникова

Одесский национальный университет им. И. И. Мечникова, Одесса, Украина

Marbel@ukr.net, gedr@inbox.ru

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$y'' = \alpha_0 p(t)\varphi_0(y)\varphi_1(y'), \tag{1}$$

в котором $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, $p : [a, \omega[\to]0, +\infty[$ $(-\infty < a < \omega \leqslant +\infty)$ — непрерывная функция, $\varphi_i : \Delta_{Y_i} \to]0, +\infty[$ $(i = 0, 1)$ — непрерывные функции, $Y_i \in \{0, \pm\infty\}$, Δ_{Y_i} — либо промежуток $[y_i^0, Y_i[$ либо — $]Y_i, y_i^0]$ (здесь при $\omega > 0$ считаем, что $a > 0$, а при $Y_i = +\infty$ $(Y_i = -\infty)$ считаем $y_i^0 > 0$ $(y_i^0 < 0)$ соответственно). Кроме того, предполагается, что каждая из функций φ_i является правильно меняющейся (см. [1]) при $z \to Y_i$ $(z \in \Delta_{Y_i})$ порядка σ_i, причем $\sigma_0 + \sigma_1 \neq 1$.

Определение 1. Решение y уравнения (1) будем называть $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-решением, если

$$y^{(i)} : [t_0, \omega[\longrightarrow \Delta_{Y_i}, \quad \lim_{t\uparrow\omega} y^{(i)}(t) = Y_i \quad (i = 0, 1), \quad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{(y'(t))^2}{y''(t)y(t)} = \lambda_0.$$

Наиболее сложными для изучения являются те из них, для которых $\lambda_0 = 0, 1, \infty$. Настоящая работа посвящена $P_\omega(Y_0, Y_1, \infty)$-решениям.

Определение 2. Будем говорить, что функция $\varphi_i(z)$, где $i \in \{0, 1\}$, удовлетворяет условию S_i, если для любой непрерывно дифференцируемой функции $L : \Delta_{Y_i} \to]0; +\infty[$ такой, что

$$\lim_{\substack{z\to Y_i \\ z\in\Delta_{Y_i}}} \frac{zL'(z)}{L(z)} = 0,$$

имеет место соотношение

$$\theta_i(zL(z)) = \theta_i(z)(1 + o(1)) \text{ при } z \to Y_i, \quad (z \in \Delta_{Y_i}).$$

В работе [2] исследованы $P_\omega(Y_0, Y_1, \infty)$-решения уравнения (1) для случаев, когда функция $\varphi_0(z)$ удовлетворяет условию S_0. В настоящей работе удалось распространить эти результаты на общий случай уравнения (1). Получены необходимые и достаточные условия существования у уравнения (1) $P_\omega(Y_0, Y_1, \infty)$-решений, а также найдены асимптотические представления при $t \uparrow \omega$ для таких решений и их производных.

Литература

1. Seneta E. *Regularly varying functions*. Lecture Notes in Math. Vol. 508. Springer-Verlag, Berlin, 1976.

2. Евтухов В. М., Белозерова М. А. *Асимптотические представления решений существенно нелинейных неавтономных дифференциальных уравнений второго порядка* // Укр. Мат. журн. 2008. Т. 60, № 3. С. 310–331.

О ГРУБОСТИ L^p-ДИХОТОМИИ НА ОСИ

Л.И. Бортницкая, Р.А. Прохорова

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

Рассматриваем линейные системы

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x \tag{1}$$

с кусочно-непрерывными коэффициентами $A(\cdot) : \mathbb{R} \to \mathrm{Hom}\,(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ и с фундаментальной матрицей $X(t)$, $X(0) = E$. В дальнейшем систему (1) будем отождествлять с ее матрицей коэффициентов $A(\cdot)$ и называть системой A.

Определение [1, с. 9; 2]. Будем говорить, что система (1) обладает свойством L^p-дихотомии на числовой прямой $\mathbb{R}$ с параметром $p > 0$ и обозначать это включением $A \in L^p_{\mathbb{R}} D$, если существуют положительная постоянная K и пара взаимно дополнительных проекторов P_1 и P_2 таких, что выполнено неравенство

$$\int\limits_{-\infty}^{t} \|X(t)P_1X^{-1}(\tau)\|^p \, d\tau + \int\limits_{t}^{+\infty} \|X(t)P_2X^{-1}(\tau)\|^p \, d\tau \leqslant K, \quad t \in \mathbb{R}.$$